分野横断ゼミ
ぽこぽこ会

ぽこぽこ会は分野横断ゼミの愛称です。

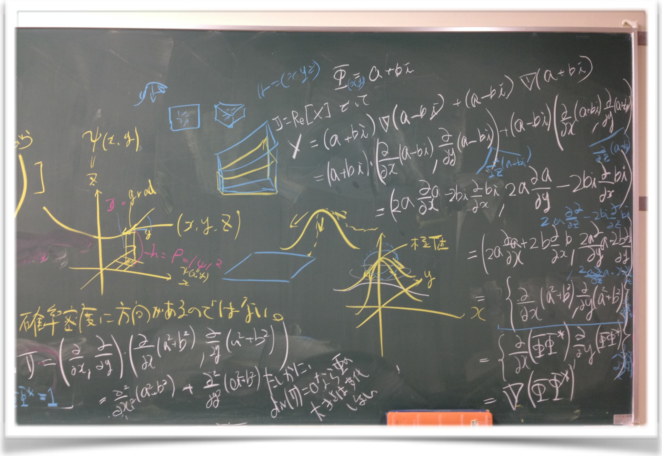
基本的に勉強は、一人でするものです。しかしそれだけでは、自分のいる位置を見失ってしまったり、視野が偏ってしまったりします。そんなときに、“ぽこぽこ”と浮上して、さらに前進するきっかけを得る場が欲しい。そんな思いで始まったのがぽこぽこ会です。

ぽこぽこ会とは

物理・数学・情報を学ぶ学生を中心に、学年や専攻を問わず議論しあう会です。当初は、それぞれが面白いと思っていることや、理解に行き詰っているものを持ち寄って、分野の違う人どうしで議論することで、解決の糸口や更なる発展が見出せたらいいなと考えていました。情報科や数物連携コースの学生の参加もありましたが、時間割等の関係や、”自主ゼミ”という響きの硬さもあってか、物理系の学生が多く集まるようになってしまいました。
しかし、講義では流されてしまうような概念を掘り下げたり、今までに身に着けた知識を応用してふとした問題に取り組んだりと、有益な時間でした。やはり、他分野の学生が少ないことで、議論の広がりは小さくなってしまい、残念でしたが、本来の目的である「息継ぎの場」というのは達成できたように思います。

現在の活動

28年度になり、新たな目的を加えて活動を開始しました。参加者の所属する物理科学科の同学年内では、以前から授業前後の休み時間などに、自分の興味のある分野のニュースや講義に関連した内容を解説しあったりしていました。4回生で研究室に分属すると今までのように専門に関係なく集まることがなくなってしまいます。しかし、物理に対して好奇心旺盛でどんなことでも面白いと思う人が多く、気軽に他の研究室の内容を知れる場を欲していました。そこで、研究報告会という意味合いも加えて活動を開始しました。4月12日に28年度の初回があり、素粒子論研究室で行われたセミナーの内容について報告をしてもらいました。また、理解の助けになればと購入したKEK物理学シリーズは春休みから貸し出しを行っており、現在も7巻中5巻が貸し出されている状況です。



お世話になった黒板

春合宿

3月16日から28日までの間、学内の合宿所や学内の教室を利用して合宿を行いました。参加者は3名で、加えて帰省の都合などで3人ほどが流動的に参加していました。内容はメシア量子力学シリーズの摂動論部分の理解と、各自、量子力学の復習や場の理論の予習でした。

摂動論の理解

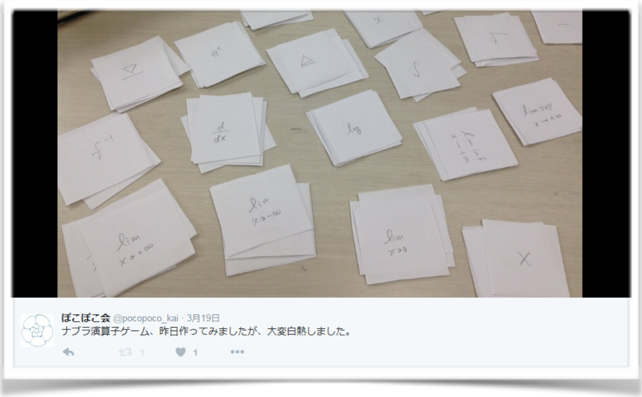
メシア量子力学シリーズを用いた自主ゼミは、以前まで輪読形式で進めていました。しかし今回は、合宿という短期間にある程度の分量を理解することを目標にしていました。そこで、セミナーライブラリ物理学シリーズの「演習　量子力学」の該当範囲の問題を解き、生じた疑問点をメシア量子力学を用いて理解を深めるという形を取りました。
実際に目標としていた範囲は終了でき、4月からの各研究室でのセミナーをスムーズに進めることが出来ました。

各自の復習/予習

参加者の中にはすでに研究室のプレゼミが始まっている人がおり、すべての時間を摂動論の理解に費やすことは難しい状況でした。そのため、各自の自習時間を多く取りました。疑問点をその場で解決しあえるのはもちろん、各自が違う範囲をしていることを利用し、理解したことや気づいたことはその場で共有するようにしていました。それにより、各自が学習した内容＋αを得ることが出来ました。

合宿の雰囲気

時間を忘れ、集中というよりも熱中して取り組めたように思います。黙々と取り組み、誰かが解説や疑問点を挙げれば議論が始まるといった本当に良い雰囲気でした。また、個人で合宿所を借りることは非常に難しいため、今回のようなゼミがあることのありがたさを痛感しました。



写真は、休憩がてら楽しんだ、ナブラ演算子ゲームです。

追悼

私たちに「おたすけ」事業の存在を教えてくださったのは、奈良女子大学 素粒子論研究室の寺尾治彦先生でした。以下の追悼文にもあるように、学生とのささいな会話を覚えていてくださるような先生でした。
報告書としては場違いであるかもしれませんが、寺尾先生のお声掛けがなければ、このゼミは存在しませんでした。この場をお借りして、感謝とともに、以下の追悼文をぽこぽこ会ホームページから転載させていただきます。

追悼 寺尾治彦先生

2015年12月、奈良女子大学 素粒子論研究室の寺尾治彦先生がお亡くなりになりました。
当ぽこぽこ会が存在するのは、寺尾先生のおかげです。新年度も活動するぽこぽこ会ですが、初心にかえる思いも込めて、寺尾先生との経緯をここに記したいと思います。

ぽこぽこ会は、奈良女子大学 理系女性教育開発共同機構の「おたすけ事業」により、本を買っていただいたり、コピーカードをいただいたりしています。この「おたすけ事業」に応募することを勧めてくださったのが寺尾先生でした。
寺尾先生と私たちの学年は、昨年後期まで、授業などの接点がなく、初めてお話ししたのが、研究室紹介後の焼き肉パーティーのときでした。そのとき寺尾先生に、何人かで自主ゼミをやっていることを話したら、「今年の3回生は元気だなあ」と笑っておられたことを思い出します。

それから1ヶ月たった11月初旬の頃、授業のため、ある教室に行ったところ、寺尾先生がわざわざ待っておられて、私たちに「おたすけ事業」の応募用紙を渡してくださいました。先生は、焼肉パーティーのときのちょっとした会話を覚えてくださっていて、ぜひ応募してみたら、と勧めてくださったのでした。
自主ゼミの会の申請書を作るにあたり、活動内容や活動目標を明確に設定したことが、私たちの自主ゼミのその後を大きく変えました。それまで単なる内輪の自主ゼミ会であったものが、他学部他学科の人を巻き込んだ規模になり、ホームページも作成し、定期的な報告会や、春休み合宿を開催するまで発展することになりました。

しかし寺尾先生は、私たちに応募用紙を渡してくださった1週間後から体調を崩され、そして1ヶ月後の12月6日に亡くなられました。そのため私たちは、申請が通過したことも、そしてその後どんな活動ができたかも、ご報告できなくなってしまいました。

学生とのちょっとした会話を覚えていて、わざわざ足を運んでチャンスを教えてくださったことからもわかるように、先生は、とても暖かい素敵な方でした。授業のときも、大切なことを書くたびに、少し心配そうに学生を振り返って、「伝わっていますか？」と尋ねられ、ご自分の説明が相手の心にちゃんと届いているか、いつも気にかけておられました。そのため、先生の話すスピードや板書の量は、理解しながらノートをとるのにちょうど良く、最初の授業のときから、クラス中が「ひかえめに言っても神」と絶賛したほどでした。また、質問に行ったときも、懇切丁寧に教えてくださり、先生がおすすめしてくださった本には、今でも助けられています。

今はがらんどうの、先生の研究室をのぞくと、黒板には、私が質問しに行ったときに書いた数式がまだ残っていて、それを見るたびに、先生を寂しく思い出します。

最後の授業のとき、教室に入るなり椅子に座り込むほど息苦しそうにされ、咳き込んでおられたにも関わらず、先生は最後まで授業をされました。あのとき、どうかご無理をなされないでください、と強く言えばよかったと今も思っています。そして先生が、復帰日のわからぬまま授業を休講されてから、ずっとどこか恐ろしく、早く戻ってきてほしいとお祈りしていました。先生の訃報をただただ悲しく思うと同時に、先生から学ぶ時間が、たったの2ヶ月弱しかなかったことを、本当に残念に思います。

寺尾先生、本当にありがとうございました。先生がくださったチャンスを大切に、これからも勉強してまいります。

心よりご冥福をお祈り申し上げます。

(追悼文 文責・北出智巳)

ホームページ

ぽこぽこ会 オフィシャルサイト

http://pocopocokai-kasetu.blogspot.jp

ぽこぽこ会Twitter

@pocopoco_kai

https://twitter.com/pocopoco_kai

第1回ぽこぽこ会

まとめ作成係：

理学部物理科学科３回生深川千宙

ぽこぽこ会のルール

ルールはただ一つ！
学年、役職関係なく、タメ口で議論、おしゃべりしましょう！

発表者がしゃべっている間もどんどんツッコミをいれて、議論したり疑問点を解決したり、発展させたり気軽に参加するためのルールです。

今日の話題の根底にあるテーマは「自然現象において情報とはなにか？」です。

グラフ理論の紹介

発表：北出智巳

ポイント

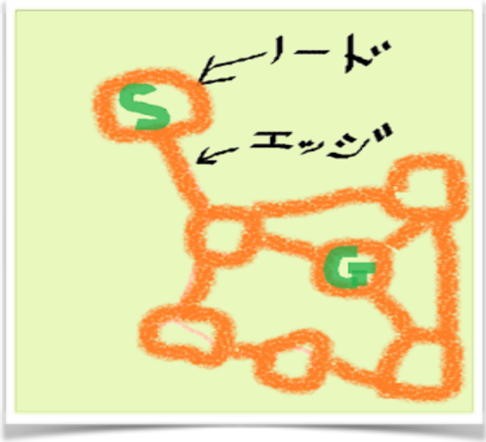
グラフ理論の考え方を用いることで、自然現象をうまく扱えるのではないか

まずは用語の説明を….

グラフ
対象の集合とそれらのつながりの集合を表したもの。

ノード
各点のこと。

エッジ
点と点を結ぶ線。これにはその線の通過しやすさであったり、通貨料金であったりと「重み」という名前で条件をつけることが出来る。



少し見づらいですが上の図で、ＳからＧまでの経路はいくつも考えられます。ですがそのうちの最短経路はどれでしょうか。
ここで全ての経路をある法則に則って確かめて最短経路を選択するときに使えるのがグラフ理論です。
ケーニヒスベルグの橋渡り問題なんかは有名なので知っている方もいるかもしれません。
ここからが本題です。
自然現象は、何故かいつも最短距離であったり最小のエネルギーとなるように変化しています。例えば、励起した原子核が安定な状態になるときにγ線を放出しますが必要な量だけを放出します。また光はひとりでに曲がったり道草をくったりはしません。
つまりかかる時間が最短になる経路で進みます。
→なにやらグラフ理論が使えそうなニオイがしてきませんか

ここで復習ですが光は波動性と粒子性を持っていました。今回は光の波動性に注目して屈折の問題を考えてみます。
光の屈折は次の式で表せると高校までに習ってきたはずです。

$$nv=n'v'$$
$$n\sin\alpha=n'\sin\beta$$

これは実験から経験則としてわかっているものです。

今回は見方を変えて、
ある角度αで屈折率n'の媒質に光が入射したとき、なぜ光は必ず最短経路である方向角度βに屈折するのでしょうか。
高校までに習ったもので説明するとホイヘンスの原理を使います
（ちょっとホイヘンスの原理を表す絵は割愛）
ホイヘンスの原理はいくつもの波が重なって進行方向が決まるというものでした。
<u>→これがどうグラフ理論と関係があるのか？</u>

まだ勉強中ですがどうやらホイヘンスの原理は、ダイクストラというグラフ理論のアルゴリズム（離散的）の、連続ver.に対応したものであるようです。
現段階の私たちの理解ではホイヘンスの原理から波は重ねあわせが起きて次の波が出来る位置が決まります。それが重ねあわされたときに次の波への最短経路が求められているのではないか。波と波との重ね合わせの繰り返しがグラフでいうところの全ての経路を試すに対応しているのではないかと考えています。
つまり、グラフ理論（=離散的でシンプルに考えられるもの）で光がどうやって進む経路を決めているのか（＝連続的で複雑なもの）を扱えるのではないでしょうか。

まとめ

- グラフ理論を使えば最短時間や最小限のコスト（エネルギー、予算）が求められる
- 自然現象はいつも最短時間、必要最低限を選択するのでグラフ理論が使えるかも
- ホイヘンスの原理はダイグストラ（グラフ理論を使ったアルゴリズムの一つ）の連続ver.に対応する
- 連続的で複雑なものが離散的でシンプルなもので扱えるかもしれない

<u>このようにグラフ理論の考え方を知れば物理への理解がもっと深まるかもというお話でした。</u>

情報熱力学の紹介

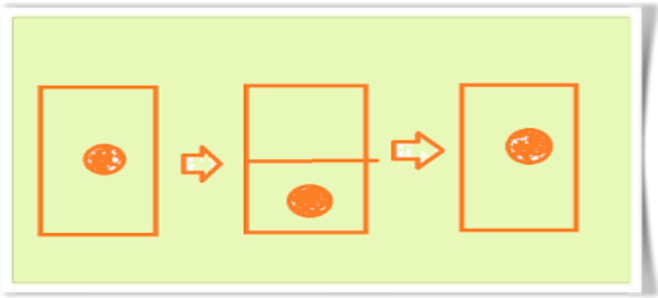
発表：深川千宙

ポイント

情報量を入れて拡張された熱力学第2法則を用いると熱ゆらぎも量子ゆらぎも根本は同じ理論で扱えるかもしれない

情報熱力学とは

マクスウェルの悪魔という考え方が根本にあるものです。ではマクスウェルの悪魔とは
これを考えるためにはシラード・エンジンというものを使います。



まず熱浴のなかに一つだけ粒子を入れた容器をいれ、熱平衡状態にあるとします。
つぎに準静的過程で容器の中央に仕切りを入れます。ここで悪魔である観測者は粒子がどちら側にあるかわかるとします。つまり（シャノンの）情報量ln2を取り出したことになります。
最後に仕切りを準静的過程で容器の端によせ初めと同じ状態に戻します。このとき、粒子から見れば体積が二倍になったのと同じです。つまり仕事W＝ｎＲＴln2をしたことになります。

ここで不思議なことは初めと終わりの状態は同じなのに、何故か仕事Wが取り出せてしまったことです。

これでは熱平衡状態にあるものがひとりでに仕事をしたりしないことを表した熱力学の第二法則に反してしまいます。
そこでここではこの仕事は情報という形で取り出された分であると考えます。
つまり情報は仕事として取り出されたと考えるということです。

この考え方を用いてなんやかんや式を確率の考え方を用いてこねていくと情報という量も組み込んだ熱力学の第二法則を導くことが出来ます。
ここから先はまだまだ勉強中でよくわかっていませんがある特定の状況下ではこの考え方を用いて熱力学の現象を情報理論の考え方に落とし込んで考えたり、ゆらぎという観点から量子的な現象を情報理論に落とし込んで考えたりできるようです。
ただまだ出始めた理論ゆえに賛否あるようですが……

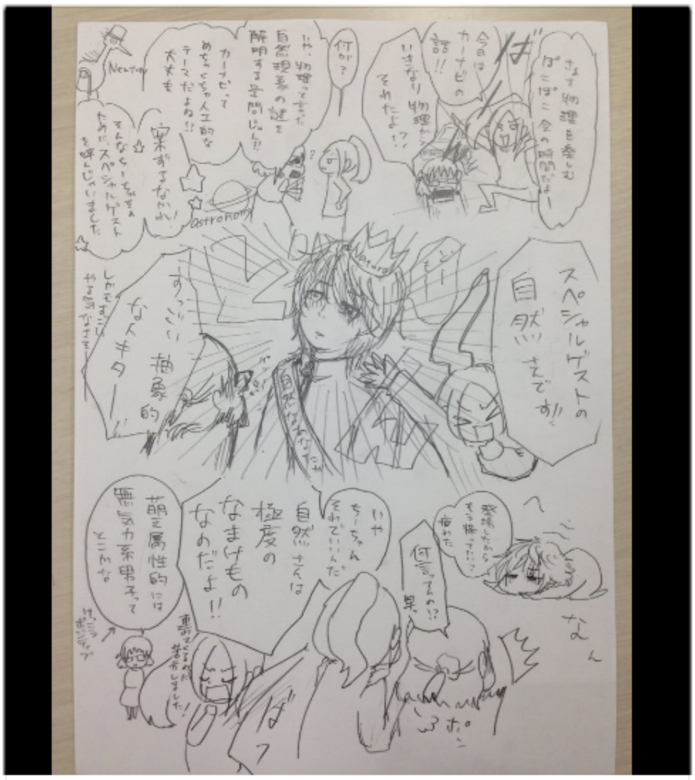
実際に目に見える例であればスーパーコンピュータの発熱にはこの情報が仕事として取り出されてしまうことが関係があるとかないとか……
他には量子ゆらぎのあたりから量子もつれまで発展したり、脳の記憶に関するモデルと似てるな……などいろいろと広がりがありそうです。

まとめ

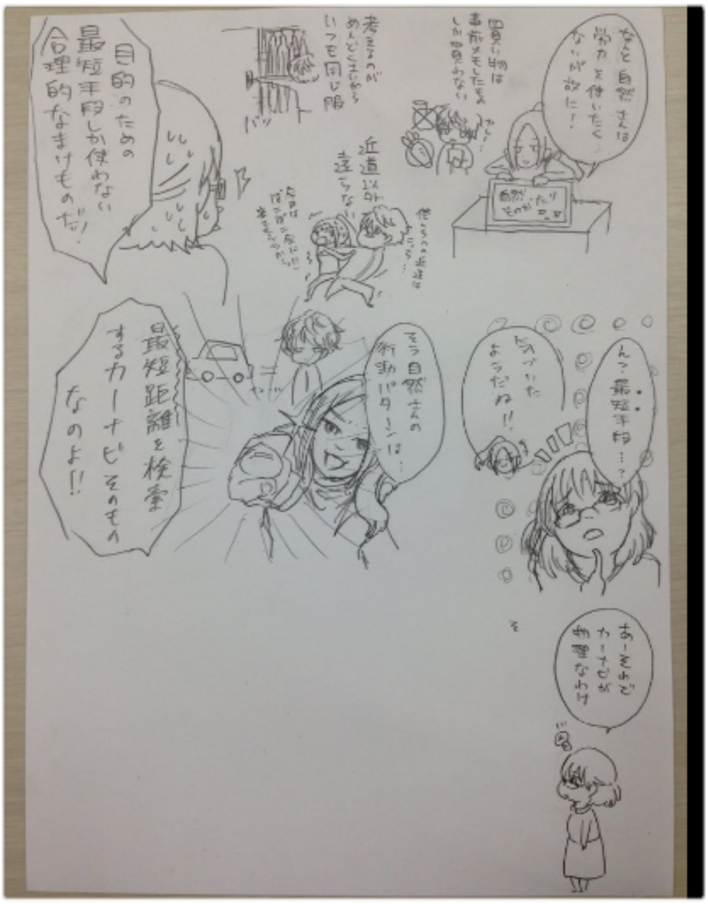
ある条件下では情報を仕事として取り出せる

どうにも今の私の知識では理解しきれないないようだったのでもう少しいろんな準備が出来てからもう一度考えてみたいと思います。こんな理論があるんだと頭の片隅にでもおいておければと思います。

参加者の皆吉さんが、第1回の内容を漫画にまとめてくれました。



ぽこぽこ会 @pocopoco_kai · 2015年12月22日
ぽこぽこ会第一回を、漫画に書いてくれました！よすありがとうー！



第2回ぽこぽこ会

まとめ作成係：

理学部物理科学科3年　北出智巳

秘書問題

発表：西谷理佐

毎日放送の教養バラエティ番組「林先生の驚く初耳学！」で取り上げられた秘書問題。35歳までに結婚するとして、何人の人を見送ったら、一番良い人に出会える確率をあげることができるか？という問題で、Twitterなどで話題になった。放送では、証明のしかたをちゃんと説明してくれなかったので、一部だけ映った数式から、どんな証明だったのか、みんなで考えてみた。しかし、説明が省略されたところに近似があったと思われ、うまくいかなかった。また、林先生の設定では、1年毎に新しい人と付き合うが、スパンを短くすれば、もっと多くの人と付き合うことができる。その一方で、短いスパンでは、相手を深く知れないというジレンマもある。最適な付き合う期間とはいくらだろうか？そうした課題も含めて、秘書問題は、改めて証明を調べ、次回決着をつけることになった。

量子力学の公理化と量子論理

発表：北出智巳

光や電子には、私たちの日常的な感覚では不可思議に見える現象がたくさんある。例えば、スリットを通り抜ける電子。ふたつのスリットに向かって電子を入射させ、スリットの向こうに蛍光板を置いておくと干渉縞ができる。このような粒子と波の二重性の時点で、すでに日常感覚を超えているが、それだけではない。スリットのところに観測装置を置いて、電子がどちらのスリットを通ったのか観測すると、途端に干渉縞が消える。観測することによって、電子がどちらのスリットを通ったかが確定してしまったからだ。このように「測定結果は確率的にしか決まらず、測定することで、確定した特定の状態に収縮する」とするは、日常感覚としては、かなり不可思議な仕組みである。

次の例として、偏向板の実験がある。縦向きの溝がついた偏光板と、横向きの溝がついた偏光板を平行に並べて光を入射したら、光は出てこない。しかし、その2つの偏光板の間に、対角線に対して平行な偏光板を入れると、入射光の一部が出てくる。この実験結果をどう考えるかには、色々な方法があるけれど、「量子力学の世界に通用している論理は普通の論理と異なる」と考えることもできよう。そのようにして作られた新しい論理が量子論理だ。今日は、初めて量子力学を習ったときに感じる不可解さのこと、そして、それらは、量子力学が原理として据え置いたものに由来しており、量子力学の内部からは説明できないこと、ではそれらの原理はどのようにして見出され、どう整理されたのかを見たのちに、量子論理とはどんなものか、に少しだけ触れる。

初めて量子力学を習ったときに感じる不可解さのいくつかは、波動関数にあるのではないだろうか。

1. なぜ自然界の記述に、複素数が登場するのか？
2. なぜ波動関数の絶対値の二乗が存在確率なのか？
3. なぜ物理量が演算子になったのか？

などなど。そこで、シュレディンガーが、シュレディンガー方程式を作ったとき、恐らくこうやって考えたのだろう、とされる方法で、シュレディンガー方程式を作り、上のような疑問がどこから来たのかを探ってみた。(*)

エネルギーが離散的であること、つまりE=hνと、そしてE=pc、波の伝搬式、エネルギー保存の式を使って、うまいこと整理し、いくらか不自然な工夫をすると、確かにシュレディンガー方程式を作ることができる。実際に作ってみると、シュレディンガー方程式について、「どんな演繹的推論を行なっても、この方程式に到達しえないことはきわめて明瞭であ

る。数理物理学の方程式はすべてそうであるが、この方程式も仮定されるべきものであり、これが正しいとされるのは、方程式による予想と実験結果との照合がうまくゆく場合に限られる」(1971(東京図書株式会社)メシア「メシア量子力学1」p51) と言われている理由が実感できる。シュレディンガー方程式は、とても不自然な操作をしないと作れないが、実験結果をうまく記述する。だからこそ、量子力学は、シュレディンガー方程式を原理の一つとして据え置き、整理されねばならなかったのだ。

どの式がどの式から導かれ、あるいは導かれず原理として仮定されねばならないのか。こうした数学的構造の整理に、大きな役割を果たしたのが、フォン・ノイマンだ。ノイマンは、次の3つを柱として、量子力学を公理化した。(**)

公理1.

1つの物理系に対して、1つのヒルベルト空間を対応させ、その物理系の可能な物理的状態を、そのヒルベルト空間の元として表す。物理系の観測可能な力学変数(物理量/観測量)は、ヒルベルト空間の自己共役作用素(エルミート演算子)として表す。

公理2.

状態ベクトルをその射影作用素で射影したものの長さの2乗を、その物理量がその区間に値をとる確率とする(つまり確率解釈)。

公理3.

シュレディンガー方程式が成り立つ。

(ここで、ヒルベルト空間の定義をおさらいしましたが割愛)

さて、この公理のもとで、「状態xである粒子Aが、領域Dに属するか否か」という問題を考えてみる。この場合、ありうる可能性は3つ。

可能性1. 状態xでAはDの中にある。
可能性2. 状態xで、AはDの外にある。
可能性3. 上の1, 2のいずれでもない。

可能性3がありうるところが、古典物理学との大きな違いだ。

この問題をヒルベルト空間で考えてみると、1を表す状態ベクトルと、2を表す状態ベクトルは直交していることがわかる。そして3は、1と2の状態ベクトルの線形和(つまり重ね合わされて作られるベクトル)に相当する。2つのベクトルの線形和は、その2つのベクトルがはる平面上の点をどれでも実現できるので、3を表す状態ベクトルは無数にあるといえる。つまり量子論理は、無数の真理値をもつ論理だったのだ。このように複数の真理値をもつ論理は、いわゆる普通の論理(古典論理と呼ばれ、真理値は、真と偽の2つ)とは違って、多値論理と呼ばれる。量子論理の性質は他にもたくさんあるが、今日はここまで。

ちなみに、量子論理は、古典論理を挟んで、直観論理と対称な関係にあるらしい。直観論理の大家、竹内外史の言葉を引用すると、「さて、この量子論理と直観論理との古典論理をはさんでの奇妙な対称性はどこからくるのであろうか？量子論理が物質(粒子)の論理で、直観論理が人間の論理だということがそこに関係しているのだろうか？」(1981 (裳華房) 竹内外史「基礎数学選書24 線形代数と量子力学」p137)とのことであり、とても興味深い。直観論理との関係ももっと勉強したいなと思ったのであった。

(*)参考: Eman 物理学/量子力学/シュレディンガー方程式 http://homepage2.nifty.com/eman/quantum/schrodinger.html
(**)参考：小澤正直「量子集合論と量子力学の解釈問題」
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1525-6.pdf

第3回ぽこぽこ会

気になるパラドックスの話

発表：増田佳奈
まとめ作成係：
理学部物理科学科3年　増田佳奈

囚人のジレンマ

(『Newton別冊　絵解きパラドックス』P.6,7から引用)

2人組の銀行強盗の容疑者が、武器の不法所持で逮捕された。しかし銀行強盗の決定的な証拠が掴めない。2人はともに黙秘を続けている。
そこで取調べ官は2人を別々の部屋で取り調べることにし、それぞれにこう話した。

★ 2人とも黙秘なら、どちらも刑期1年
★ 1人黙秘、1人自白なら、黙秘した者は刑期10年、
自白した者は釈放
★ 2人とも自白なら、どちらも刑期5年

さて、2人はどうするのが1番得か？
この問題を解くにあたって、ジョン・ナッシュ氏の『非協力ゲーム』の論文を参考にしようと思ったのだが、理解には多少の時間を要する。そのため、今回は問題の紹介のみとし、具体的な解決は次回に持ち込むこととした。

投票のパラドックス

先程と同様、『Newton別冊　絵解きパラドックス』から例を引用する。
以下は、勝ち抜き方式で3つのものの中から1つを選んだ時の例である。
A・B・Cの3人が昼食に一緒のものを食べることにした。1人1つずつ食べたいものをあげ、それらを仮に①②③とする。
3人の中で、①②③の優先順位は次の通りである。

A…1位①　2位②　3位③
B…1位②　2位③　3位①
C…1位③　2位①　3位②

このとき、勝ち抜き方式で食べるものを決めると次の通りになる。
1.最初に①対②　勝者①
次に①対③　勝者③
最終勝者は③

2.最初に②対③　勝者②
次に①対②　勝者①
最終勝者は①
3.最初に①対③　勝者③
次に②対③　勝者②
最終勝者は②

このように、いずれの候補も勝ち残る可能性がある。

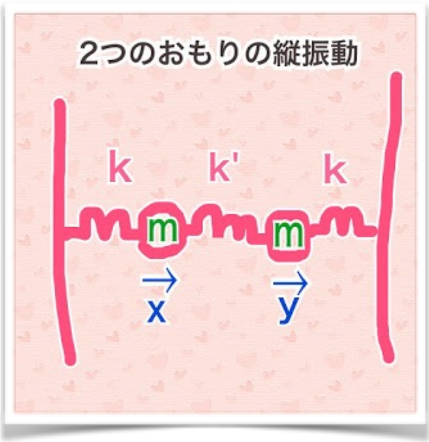
今回は時間が足りずに紹介できなかったものもあるので、次回以降随時紹介していきたい。

フーリエ解析の話

発表：北出智巳
まとめ作成係：
理学部物理科学科3年　北出智巳）

フーリエ解析は、応用範囲がとても広く、科学の色んなところで顔を出す。その分、教科書によって、説明の仕方はかなり多様であり、数学的な側面を掘

り下げたもの、工学的な応用を掘り下げたものなどなど、色々な語りかたが存在する。
今回の目標は、『フーリエ級数展開の物理的イメージを得ること』だ。高校物理でも登場するようなシンプルな素材を用い、ニュートン力学が、フーリエ級数展開の成立を要請することを見ていく。まず、フーリエ級数展開の物理的イメージのために、モードという概念を導入する。
まずは次のように、2つのおもりがバネにつながれて縦振動する問題のおさらい。



座標xにあるおもりと、座標yにあるおもりそれぞれについて運動方程式を立てると...

m(d^2x/dt^2) = -kx + k'(y-x)
m(d^2y/dt^2) = -k'(y-x) –ky

各おもりの運動はわかるが、双方から異なる力で引っ張られるし、どんな動きになるかは視覚的にイメージしにくい。
しかし上の2式を足し引きし、両辺を2で割ったら単振動の方程式になる。

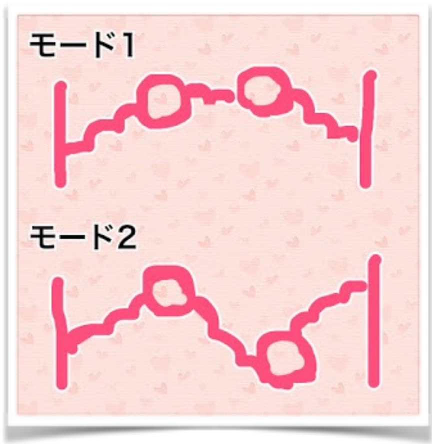
m(d^2((x+y)/2)/dt^2) = -k(x+y)/2
m(d^2((x-y)/2)/dt^2) = -(k+2k')(x-y)/2

そして、足し引きして現れるのが、重心座標と相対座標だった。

重心座標 X = (x + y) / 2
相対座標 Y = (x - y) / 2

各点で見るとややこしい運動だったけれど、実は、重心の行き来と、相対座標の伸び縮みという二つの独立な単振動の重ね合わせだったのだ！

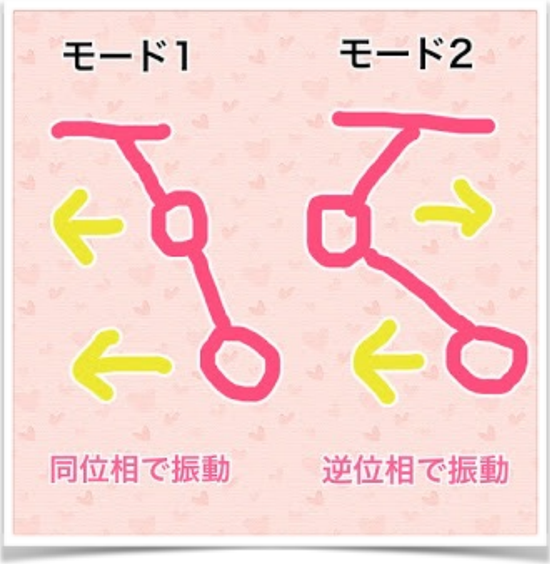
このように、一見ややこしい運動をしていても、ある座標を選べば、独立の単振動をしていることがわかる。その座標X(t), Y(t)を基準座標と呼び、その単振動をモードとぶ。そして、モードの振動数を固有振動数と呼ぶ。
今回の場合、立式して眺めてたらなんとなく基準座標が見えた。けれど、一般に、基準座標をパッと見抜くのはキツそうである。しかし、モードの形自体は、ただの単振動なので想像しやすい。
例えば同じバネの横振動。モードが次の2つになることは容易に想像できる。



ではモードを一般的に求めるにはどうすれば良いのだろうか？
任意の初期条件で振動させた場合、複数のモードが重ね合わさって振動するので、ややこしい運動になってしまう。けれど、初期条件をうまくとれば、1つのモードだけを実現させることもできる。2つのおもりの縦振動でいうなら、両手でそれぞれおもりを持ち、同じ距離だけ並行にズラして手を離せば、重心座標が動く単振動になる。反対の方向に同じ分だけズラして手を離せば、相対座標が動く単振動になる。
そこで、このような、1つのモードだけが実現してるときの性質をまとめてみる。

1.おもりの座標x(t) y(t)は独立に単振動する(それぞれの単振動の式に他方の変数が入らない)
2.二つの振動数は共通で位相も同じ(正負は違っても良い)
3.振動数と二つの振幅比は運動方程式から決まってる。つまり、各モードの振動の形がモードごとに決まってる。

つまり、上の性質を満たすようなモードを表す式を作っておいて、運動方程式に代入したら良い！
試しに、二重振り子で考えてみる。



2つのおもりが同じ振動数かつ同じ位相で独立に振動するケースは、次の2つ。

この2つが二重振り子のモードであり、一般解は、2つのモードの重ね合わせとして表現できるとわかる。

一般的にモードを求める方法を整理しておくと、

まず運動方程式を立てる。
↓
モードの重ね合わせ状態じゃなく、うまいこと初期条件を整えて、
1つのモードで振動してるようなケースを考える。
↓
このとき、xとyは共通の振動ω、共通の位相ωt+φで振動してるからそれを代入。
↓
この運動方程式を解いたら、モードの単振動の振幅や振動がわかる。
↓
終わり

さて、おもりの数がN個でも、同じように考えることができる。ただし、運動方程式だけじゃなく、境界条件も含めて、振幅や振動数が決まる。(具体的な計算は長いので割愛)

まずi番目のモードを求め、Nをさらに大きくしていくと、バネについたおもりの数が増えていくので、最終的には滑らかな曲線として動くヒモの運動が記述できるようになると考えられる(これを連続体という)。

自由度Nのときのモードから類推すれば、ヒモのモードも記述することができる。

これが波動方程式を満たせばよい。

(波動方程式の導出は付録参照)

境界条件を考えると、モードの波数と振動数が求まるので(計算長いので割愛)、弦の振動の一般解が得られる。

未定乗数A1, A2, ••• と位相φ1, φ2, •••は初期条件から決まる。

ある初期条件下では、fのフーリエ展開の項が現れる。

実は、これは、初期値が与えられた微分方程式 (つまり初期値問題) であり、ニュートン力学の世界では必ず解けるものである。初期値さえ与えられればその後の運動は決まる、と信じているからこそ、逆に、フーリエ展開という数学の定理が成り立つはずだと予想できるのだ。

A1, A2, •••を求めようと思えば、フーリエ級数展開の公式を使えば良い。

(フーリエ級数展開が可能であることを認めさえすれば、この公式の確認は、三角関数の和積の公式を用いて簡単に確認できる)

以上により、連続体の運動を記述することができた。

付録： 波動方程式の導出

弦を微小部分の集合体と見なし、この微小部分について運動方程式を立てる。テイラー展開による近似を用いて整理すれば、波動方程式が得られる。詳しい導出は例えばこのPDFを参照。

http://www.mech.kagoshima-u.ac.jp/~katanoda/基礎式の導出_ver01.pdf

参考文献：

1999年(裳華房)小形正男『裳華房テキストシリーズ - 物理学 振動・波動』第2章-4章

最後に

この記事は、ゼミ後に参加者によって書かれたものです。執筆者（まとめ作成係）は意図的に発表者にならないようにしていました。そのため、正確に理解出来ていたとは限らない部分もあります。
しかし、参加者が見つけた面白いことを気軽に発表できる場を目的としており、たとえ理解が完全でなくても、まずはまとめを仕上げることを優先しました。このことにより理解が深まり、視野を広げるきっかけになったと考えています。

謝辞

「おたすけ」事業への応募を勧めてくださった寺尾先生、担当教員の比連崎先生、この企画に賛同し、協力してくれた自主ゼミメンバーの皆様、そして、このような機会をくださり、親身に対応してくださった共同機構の皆様に、感謝致します。